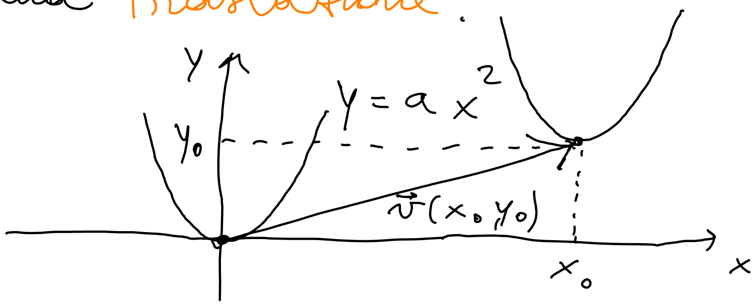
La parabola con l'asse parallelo all'asse y

Si può ottenere l'equazione della parabola con il vertice in un punto qualsiasi mediante una traslazione:



Le componenti del vettore di traslazione sono le coordinate (x_0, y_0) del vertice della parabola.

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

L'equazione della parabola traslata diventa:

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2, \quad \text{cioè} \quad y = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 + y_0$$

Quest'ultima equazione è della forma $y = ax^2 + bx + c$

con $b = -2ax_0$ e $c = ax_0^2 + y_0$.

Da queste equazioni si possono ricavare le coordinate del vertice conoscendo a, b e c:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = c - ax_0^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \cancel{a}\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Anche le coordinate del fuoco si ottengono dalla traslazione: $F(x_0, f + y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

L'eq. della direttrice diventa:

$$y - y_0 = -f \Rightarrow y - \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = -\frac{1}{4a}, \quad y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

Il coefficiente a è invariante per traslazione, infatti è legato all'apertura (ampiezza) della parabola, che non cambia in una traslazione.

Esempio

Determina vertice, fuoco e direttrice della parabola di equazione $y = -2x^2 + 4x - 3$

$a = -2$, quindi $f = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot (-2)} = -\frac{1}{8}$

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$, $y_V = -1$, il vertice è $V(1, -1)$

$y_F = y_V + f = -1 + \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{9}{8}$, il fuoco è $F(1, -1)$

la direttrice ha equazione $y = -1 + \frac{1}{8} = -\frac{7}{8}$